ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — MAI 1979

CONCOURS DE RECRUTEMENT DES
INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE
L'AVIATION CIVILE
ET DES INGENIEURS TITULAIRES

EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 H.00
Coef. : 1

NB - Les cinq parties du problème sont largement indépendantes.

-o-

C_2 est l'espace vectoriel sur le corps des réels dont les éléments sont les fonctions à valeurs réelles de la variable reelle admettant, pour toute valeur non nulle de la variable, une dérivée seconde continue.

I

x étant la variable, y_1 et y_2 sont deux éléments de C_2 vérifiant la condition :

(A) $$D(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq o.$$

1.1. Démontrer que y_1 et y_2 sont des éléments linéairement indépendants.

1.2. Démontrer que tout élément y du sous espace vectoriel de C_2 engendré par y_1 et y_2 vérifie l'égalité :

(B) $$\begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) & y_2(x) \\ y'(x) & y_1'(x) & y_2'(x) \\ y''(x) & y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = o.$$

1.3. Véfifier, α et β étant des constantes réelles, que (A) est satisfaite par les éléments particuliers de C_2 :

$$f_1 : x \to f_1(x) = x^{\alpha} \cos(\beta \operatorname{Log} |x|)$$
$$f_2 : x \to f_2(x) = x^{\alpha} \sin(\beta \operatorname{Log} |x|).$$

Déduire des résultats précédents une équation différentielle du second ordre que vérifie, pour tout $x \neq o$, tout élément du sous espace vectoriel de C_2 engendré par f_1 et f_2.

II

x étant la variable réelle, a et b étant des constantes réelles, on considère l'équation différentielle :

$$E(a, b) \quad : \quad x^2y'' + axy' + by = o.$$

2.1. On pose $z(t) = y(x(t))$ où : $x(t) = e^t$ si $x > o$, $x(t) = -e^t$ si $x < o$. Déterminer une équation différentielle H(a, b), du second ordre et à coefficients constants, que vérifie $z : t \to z(t)$ lorsque l'élément y de C_2 satisfait E(a, b).

Selon les valeurs respectives de a et b, discuter l'expression de fonctions z, admettant une dérivée seconde continue quel que soit t réel, qui vérifient H(a, b) pour toute valeur réelle de t.

En déduire l'expression d'éléments de C_2 qui vérifient E(a, b) pour tout $x \neq o$.

.../...

2.2. La résolution de la question 2.1. permet d'affirmer qu'il existe des fonctions, éléments de C_2, vérifiant E(a, b) sur des intervalles ouverts non réduits à un point.

Soit alors $u : x \to u(x)$ une fonction particulière, élément non neutre de C_2, qui vérifie E(a, b) pour $x \neq o$. Soit V l'ensemble des éléments v de C_2 tels que la fonction $y : x \to y(x) = u(x) \cdot v(x)$ vérifie E(a, b).

Montrer que V n'est pas vide et déterminer une équation différentielle à variable séparable vérifiée par les éléments de V sur tout intervalle ouvert où $u(x) \neq o$.

Déterminer l'expression en fonction de u d'éléments de C_2 vérifiant E(a, b) sur tout intervalle ouvert où $u(x) \neq o$.

2.3. Montrer que la fonction particulière $u : x \to u(x) = x^{-2} \cos(\text{Log } |x|)$ est un élément de C_2 vérifiant E(5, 5) sur des intervalles ouverts que l'on précisera.

Déterminer l'expression d'éléments de C_2 vérifiant E(5, 5) sur les intervalles ouverts où $u(x) \neq o$. Montrer que tous ces éléments vérifient E(5, 5) sur les intervalles ouverts où la fonction particulière u vérifie E(5, 5).

III

On considère les éléments y_1 et y_2 particuliers de C_2 définis ainsi :

$h_1 : x \to h_1(x) = x^{-1} \cos(\text{Log } |x|)$;

$h_2 : x \to h_2(x) = x^{-2} \cos(\text{Log } |x|)$.

3.1. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'axes Ox et Oy, tracer les graphes de h_1 et de h_2 ; montrer qu'ils sont respectivement tangents aux graphes des fonctions $x \to x^{-1}$ et $x \to x^{-2}$ en des points que l'on déterminera.

3.2. Calculer l'aire algébrique de chacunedes arches que le graphe de h_1 détermine avec Ox ; étudier :

$$\lim_{x \to o} \int_x^1 h_1(t)dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \int_1^x h_1(t)dt.$$

3.3. Calculer l'aire algébrique de chacune des arches que le graphe de h_2 détermine avec Ox ; étudier :

$$\lim_{x \to o} \int_x^{e^{-\frac{\pi}{2}}} h_2(t)dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \int_{e^{-\frac{\pi}{2}}}^x h_2(t)dt.$$

IV

a et b étant des constantes réelles, on considère deux éléments y_1 et y_2 de C_2, distincts de l'élément neutre et linéairement indépendants, qui vérifient l'équation différentielle :

E(a, b) : $\quad x^2 y'' + axy' + by = o.$

4.1. Exprimer le déterminant $D(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ en fonction de sa dérivée D'(x).

4.2. Démontrer que $D(x) \neq o$ pour tout $x \neq o$.

V

A tout intervalle I de R, ouvert ou non, borné ou non, on associe l'espace vectoriel $C_2(I)$ des fonctions à valeurs réelles, définies $\forall x \in I$ et y admettant en tout point une dérivée seconde continue.

.../...

Si y_1 et y_2 sont deux éléments de $C_2(I)$ on désigne par $D(x)$ le déterminant :

$$D(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

5.1. Démontrer que si y_1 et y_2 sont distincts de l'élément neutre de $C_2(I)$ et linéairement dépendants, alors $D(x) = o$ pour tout $x \bullet I$.

5.2. Soit y_1 et y_2 distincts de l'élément neutre de $C_2(I)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

. $\exists\, x_o \in I$ tel que $y_1(x_o) \neq o$

. $\forall\, x \in I$, $D(x) = o$

Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert contenu dans I sur lequel $y_1(x) \neq o$; en déduire qu'il existe un intervalle ouvert J tel que les restrictions à J de y_1 et y_2 soient deux éléments linéairement dépendants de $C_2(J)$

5.3. Soit y_1 et y_2 deux fonctions définies sur $[-1, +1]$ par :

$$y_1 : x \to y_1(x) = \begin{cases} o & \text{si} \quad x = o \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq o \end{cases}$$

$$y_2 : x \to y_2(x) = \begin{cases} -y_1(x) & \text{si} \quad x \in [-1, o] \\ +y_1(x) & \text{si} \quad x \in [o, 1] \end{cases}$$

Vérifier que y_1 et y_2 sont éléments de $C_2([-1, +1])$. Ces éléments sont-ils linéairement indépendants ? Calculer $D(x)$ pour tout $x \in [-1, +1]$; quelle conclusion peut-on tirer du résultat de ce calcul ?

—— -o- ——

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail